Deuxième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{z-2} \end{cases}$.

Trouver $p \in \mathbb{C}$ tel que f induise une bijection $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$, et exprimer la réciproque φ^{-1}.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, *on a* $z - (z-2) = 2 \neq 0$, *donc* $z \neq z-2$, *donc* $f(z) \neq 1$.

Cela montre que f *induit une application* $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$, *et on va montrer que cette application est bijective.*

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ *et* $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. *On a*

$$\begin{aligned} f(z) = w &\Leftrightarrow \frac{z}{z-2} = w \\ &\Leftrightarrow z = wz - 2w \\ &\Leftrightarrow (w-1)z = 2w \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2w}{w-1}. \end{aligned}$$

Cela montre que tout $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *a un unique antécédent, ce qui montre que* φ *est bijective. Cela donne aussi l'expression de la réciproque :*

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}^* \\ w \mapsto \dfrac{2w}{w-1} \end{cases}.$$

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Linéariser $\cos^3(x)$.

   On a

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x. \end{aligned}$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\cos^3(3^k x)}{3^k}$.

   On a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\cos^3(3^k x)}{3^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{\cos(3^{k+1}x)}{3^k} + \frac{3 \times \cos(3^k x)}{3^k}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{\cos(3^k x)}{3^k} - (-1)^{k+1}\frac{\cos(3^{k+1}x)}{3^{k+1}x}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\left(\cos x + (-1)^n\frac{\cos(3^{n+1}x)}{3^{n+1}}\right). \qquad \textit{(télescopage)}$$

Problème. Sommes de Gauss.

Dans tout le problème, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$,

- on pose $\zeta_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$;
- on définit la fonction $e_n : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \zeta_n^x = \exp\left(i\,2\pi\,\frac{x}{n}\right) \end{cases}$;
- on définit la n-*ième somme de Gauss* :

$$G_n = \sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2) = \sum_{x=0}^{n-1}\exp\left(i\,2\pi\,\frac{x^2}{n}\right).$$

Le but du problème est de déterminer la valeur de G_n pour certaines valeurs de n, et notamment quand n est premier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

0. En utilisant les résultats du lycée, montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$.

   Considérons la fonction $f : \begin{cases} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \end{cases}$ *: elle est dérivable par opérations, et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2}.$$

   Par ailleurs, la fonction $g : x \mapsto \cos(x)\,x - \sin(x)$ *est dérivable, de dérivée* $g' : x \mapsto -\sin(x)\,x$. *On a donc* $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g'(x) \leqslant 0$, *donc* g *décroît sur le segment* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   Comme $g(0) = 0$, *on en déduit que* g *est négative sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *donc que* $f' \leqslant 0$, *et donc que* f *décroît.*
   Comme $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, *cela montre* $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) \geqslant \frac{2}{\pi}$.
   Comme $\sin$ *est strictement positive sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on en déduit* $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$.
   Puisque le cas $x = 0$ *est évident, cela montre l'assertion de l'énoncé.*

1. Rappeler sans démonstration le lien entre ζ_n et l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.

   On a $\mathbb{U}_n = \left\{\zeta_n^k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\zeta_n^k \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

2. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Que dire de $e_n(x_1 + x_2)$?

   On a $e_n(x_1+x_2) = \exp\left(i\,2\pi\,\frac{x_1+x_2}{n}\right) = \exp\left(i\,2\pi\,\frac{x_1}{n}\right)\exp\left(i\,2\pi\,\frac{x_2}{n}\right) = e_n(x_1)\,e_n(x_2)$.

3. Montrer que e_n est n-périodique, c'est-à-dire $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \equiv x_2 \pmod n \Rightarrow e_n(x_1) = e_n(x_2)$.

   Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x_1 \equiv x_2 \pmod n$. *On peut trouver* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x_2 = x_1 + k\,n$. *On a alors*

$$e_n(x_2) = e_n(x_1 + k\,n)$$

$$\begin{aligned}
&= e_n(x_1)\, e_n(k\,n) \\
&= e_n(x_1)\, \exp\left(i\,2\pi\,\frac{k\,n}{n}\right) \\
&= e_n(x_1)\, \exp\left(i\,2\pi\,k\right) \\
&= e_n(x_1).
\end{aligned}$$

Partie I. Exemples.

4. Calculer G_2, G_3 et G_4.

   On a

$$\begin{aligned}
G_2 &= \zeta_2^{0^2} + \zeta_2^{1^2} = (-1)^0 + (-1)^1 = 0 \\
G_3 &= \zeta_3^{0^2} + \zeta_3^{1^2} + \zeta_3^{2^2} = j^0 + j^1 + j^4 = 1 + 2j = \sqrt{3}\,i \\
G_4 &= \zeta_4^{0^2} + \zeta_4^{1^2} + \zeta_4^{2^2} + \zeta_4^{3^2} = i^0 + i^1 + i^4 + i^9 = 2(1+i).
\end{aligned}$$

5. (a) Montrer que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

   La somme des racines cinquièmes de l'unité valant 0*, on a*

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0 \qquad \textit{donc} \qquad 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} = 0$$

$$\textit{donc} \qquad 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

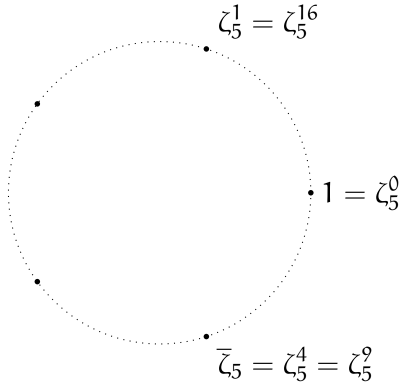
   d'après les formules d'Euler.

   (b) En déduire une équation du second degré dont $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution, puis les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   - *Notons* $\kappa = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$*. Par doublement de l'angle :* $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\kappa^2 - 1$.
     La relation de la question précédente devient $0 = 1 + 2\kappa + 2(2\kappa^2 - 1) = 4\kappa^2 + 2\kappa - 1$.
   - *Après résolution, on trouve que les solutions de cette équation du second degré sont* $\frac{\pm\sqrt{5} - 1}{4}$.
     Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$*, on a* $\kappa > 0$*, ce qui montre* $\kappa = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.
   - *En utilisant la relation* $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$ *et* $\sin\frac{2\pi}{5} > 0$ *(car* $0 < \frac{2\pi}{5} < \pi$*), on obtient* $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.

   (c) En déduire G_5.

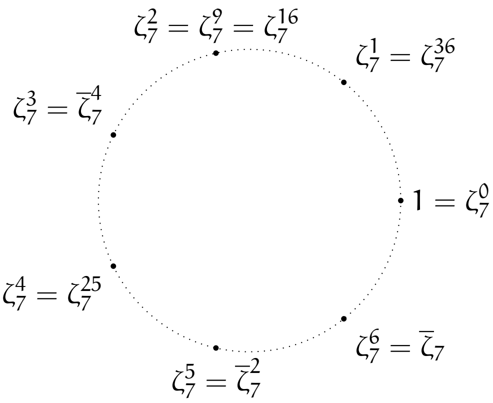
   On obtient $G_5 = \zeta_5^0 + \zeta_5^1 + \zeta_5^4 + \zeta_5^9 + \zeta_5^{16} = 1 + 2\zeta_5 + 2\overline{\zeta}_5 = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5}$.



6. En calculant $G_7 + \overline{G_7}$ et $G_7\,\overline{G_7}$, déterminer G_7.

   On a

$$\begin{aligned} G_7 &= \zeta_7^0 + \zeta_7^1 + \zeta_7^4 + \zeta_7^9 + \zeta_7^{16} + \zeta_7^{25} + \zeta_7^{36} \\ &= 1 + 2\zeta_7 + 2\zeta_7^2 + 2\zeta_7^4 \\ \textit{donc} \qquad \overline{G}_7 &= 1 + 2\zeta_7^3 + 2\zeta_5^5 + 2\zeta_7^6. \end{aligned}$$



   On en déduit

$$\begin{aligned} G_7 + \overline{G}_7 &= 2 + 2\zeta_7 + 2\zeta_7^2 + 2\zeta_7^3 + 2\zeta_7^4 + 2\zeta_7^5 + 2\zeta_7^6 \\ &= 0, \end{aligned}$$

   car la somme des racines septièmes de l'unité est nulle.
   Avec un peu plus de courage,

$$\begin{aligned} G_7\,\overline{G}_7 &= \left(1 + 2\zeta_7 + 2\zeta_7^2 + 2\zeta_7^4\right)\left(1 + 2\zeta_7^3 + 2\zeta_5^5 + 2\zeta_7^6\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & +2\zeta_7^3 & +2\zeta_5^5 & +2\zeta_7^6 \\ +2\zeta_7 & +4\zeta_7^4 & +4\zeta_5^6 & +\ 4 \\ +2\zeta_7^2 & +4\zeta_7^5 & +\ 4 & +4\zeta_7 \\ +2\zeta_7^4 & +\ 4 & +4\zeta_5^2 & +4\zeta_7^3 \end{pmatrix} \\ &= 13 + 6\zeta_7 + 6\zeta_7^2 + 6\zeta_7^3 + 6\zeta_7^4 + 6\zeta_7^5 + 6\zeta_7^6 \\ &= 7. \end{aligned}$$

   Le nombre G_7 *est donc un imaginaire pur de module* 7*, d'où l'on tire* $G_7 = \pm i\sqrt{7}$*.*
   Pour déterminer le signe, on observe que sin *est croissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, donc* $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$*. On en déduit*

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im} G_7 = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}_{\geqslant 0}$$
$$\geqslant 0,$$

donc

$$G_7 = i\sqrt{7}.$$

7. La suite du sujet montrera $G_{11} = i\sqrt{11}$ et $G_{13} = \sqrt{13}$: on peut l'admettre dans les deux questions qui suivent.

(a) Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$.

▶ *Les entiers* $1, 4, 9, 16, 25$ *et* 36 *sont congrus à* $1, 4, -4, 3, -1$ *et* -3 *modulo* 13*, respectivement. On en déduit que*

$$\sum_{x=1}^{6} e_{13}(x^2) = \zeta_{13} + \overline{\zeta}_{13} + \zeta_{13}^3 + \overline{\zeta}_{13}^3 + \zeta_{13}^4 + \overline{\zeta}_{13}^4$$
$$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{13}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{13}\right).$$

▶ *Par ailleurs, pour tout* $y \in [\![6, 12]\!]$*, on a* $13-y \equiv y \pmod{13}$*, donc* $(13-y)^2 \equiv y^2 \pmod{13}$*, donc*

$$\sum_{x=7}^{12} e_n(x^2) = \sum_{y=1}^{6} e_n\left((13-y)^2\right) = \sum_{y=1}^{6} e_n(y^2),$$

donc on a

$$G_{13} = \sum_{x=0}^{12} e_n(x^2) = 1 + 2\sum_{x=1}^{6} e_n(x^2).$$

▶ In fine, *on a*

$$\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{6} e_n(x^2)$$
$$= \frac{G_{13} - 1}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{13} - 1}{4}.$$

(b)$^+$ Pour tout x tel que $\cos x \neq 0$, on note $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Exprimer $2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$ et $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$ comme des sommes alternées $\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \cdots$ d'éléments de $\mathbb{U}_{11}$ et en déduire l'égalité $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$.

On a

$$2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \zeta_{11} - \overline{\zeta}_{11} = \zeta_{11} - \zeta_{11}^{10}$$

$$
\begin{aligned}
i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) &= \frac{\exp\left(i\frac{3\pi}{11}\right)-\exp\left(-i\frac{3\pi}{11}\right)}{\exp\left(i\frac{3\pi}{11}\right)+\exp\left(-i\frac{3\pi}{11}\right)}\\
&= \frac{\exp\left(i\frac{6\pi}{11}\right)-1}{\exp\left(i\frac{6\pi}{11}\right)+1}\\
&= \frac{\zeta_{11}^3-1}{\zeta_{11}^3+1}.
\end{aligned}
$$

En posant $\omega = -\zeta_{11}^3$, le dénominateur devient $1-\omega$ et peut faire penser à la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.
Pour cela, il faudrait écrire le numérateur sous la forme $\omega^a - \omega^b$, pour certains entiers a et b. On obtient $\zeta_{11}^3 = \zeta_{11}^{36} = \omega^{12}$, d'où

$$
\begin{aligned}
i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) &= -\frac{1-\omega^{12}}{1-\omega} = -\sum_{k=0}^{11}\omega^k\\
&= -1+\zeta_{11}^3-\zeta_{11}^6+\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^{12}+\zeta_{11}^{15}-\zeta_{11}^{18}+\zeta_{11}^{21}-\zeta_{11}^{24}+\zeta_{11}^{27}-\zeta_{11}^{30}+\underbrace{\zeta_{11}^{33}}_{=1}\\
&= -\zeta_{11}-\zeta_{11}^2+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^6-\zeta_{11}^7-\zeta_{11}^8+\zeta_{11}^9+\zeta_{11}^{10}.
\end{aligned}
$$

Après la somme, on en déduit

$$
4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)+i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \zeta_{11}-\zeta_{11}^2+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^6-\zeta_{11}^7-\zeta_{11}^8+\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^{10}.
$$

Or, après calcul,

$$
\begin{aligned}
i\sqrt{11} = G_{11} &= 1+2(\zeta_{11}+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^5+\zeta_{11}^9)\\
&= 1+2(\zeta_{11}+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^5+\zeta_{11}^9)-\sum_{k=0}^{10}\zeta_{11}^k\\
&= \zeta_{11}-\zeta_{11}^2+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^6-\zeta_{11}^7-\zeta_{11}^8+\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^{10},
\end{aligned}
$$

ce qui conclut.

Partie II. Calcul du module $|G_n|$.

8. Soit $k \in \mathbb{Z}$. En faisant attention aux cas particuliers, calculer $\displaystyle\sum_{x=0}^{n-1} e_n(kx)$.

   On distingue deux cas.

   - *Si n divise k, on a $\forall x \in [\![0, n-1]\!], kx \equiv 0 \pmod n$. On en déduit $\displaystyle\sum_{x=0}^{n-1} e_n(kx) = \sum_{x=0}^{n-1} 1 = n$.*
   - *Si n ne divise pas k, on a $e_n(k) \neq 1$. On a donc*

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n-1} e_n(kx) &= \sum_{x=0}^{n-1} e_n(k)^x\\
&= \frac{1-e_n(k)^n}{1-e_n(k)}\\
&= \frac{1-e_n(kn)}{1-e_n(k)} = 0.
\end{aligned}
$$

In fine, $\displaystyle\sum_{x=0}^{n-1} e_n(kx) = \begin{cases} n & \textit{si } n \textit{ divise } k \\ 0 & \textit{si } n \textit{ ne divise pas } k \end{cases} = n\,\mathbb{1}_{(n \textit{ divise } k)}$.

9. (a) Montrer $|G_n|^2 = \sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} e_n(x^2 - y^2)$.

Remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $\overline{e_n(z)} = \overline{\exp\left(i\,2\pi\,\frac{z}{n}\right)} = \exp\left(-i\,2\pi\,\frac{z}{n}\right) = e_n(-z)$.
On a

$$\begin{aligned}
|G_n|^2 &= G_n\,\overline{G_n} \\
&= \sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2)\,\overline{\sum_{y=0}^{n-1} e_n(y^2)} \\
&= \sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2)\,\sum_{y=0}^{n-1} e_n(-y^2) \\
&= \sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} e_n(x^2)\,e_n(-y^2) \\
&= \sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} e_n(x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

(b) On fixe $y \in \mathbb{Z}$. Montrer que la suite $\left(\sum_{d=\delta}^{\delta+n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big)\right)_{\delta\in\mathbb{Z}}$ est constante.

Soit $\delta \in \mathbb{Z}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{d=\delta+1}^{\delta+n} e_n\big(2d\,y + d^2\big) - \sum_{d=\delta}^{\delta+n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big) &= \left[\sum_{d=\delta+1}^{\delta+n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big) + e_n\left(2(\delta+n)y + (\delta+n)^2\right)\right] \\
&\quad - \left[e_n\big(2\delta\,y + \delta^2\big) + \sum_{d=\delta+1}^{\delta+n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big)\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $2(\delta+n)y+(\delta+n)^2 \equiv 2\delta\,n+\delta^2 \pmod{n}$, *donc* $e_n\left(2(\delta+n)y + (\delta+n)^2\right) = e_n\big(2\delta\,y+\delta^2\big)$.
Cela montre la constance de la suite.

(c) Déduire de ce qui précède la formule $|G_n|^2 = \sum_{y=0}^{n-1}\sum_{d=0}^{n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big)$.

On a

$$\begin{aligned}
|G_n|^2 &= \sum_{y=0}^{n-1}\sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2 - y^2) \\
&= \sum_{y=0}^{n-1}\sum_{d=-y}^{n-1-y} e_n\big((y+d)^2 - y^2\big) \qquad \begin{bmatrix} d = x - y \\ x = d + x \end{bmatrix} \\
&= \sum_{y=0}^{n-1}\sum_{d=-y}^{n-1-y} e_n\big(2d\,y + d^2\big) \\
&= \sum_{y=0}^{n-1}\sum_{d=0}^{n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big)
\end{aligned}$$

car, on a $\displaystyle\sum_{d=-y}^{n-1-y} e_n\big(2d\,y + d^2\big) = \sum_{d=0}^{n-1} e_n\big(2d\,y + d^2\big)$ *pour tout* $y \in [\![0, n-1]\!]$*, d'après la question précédente.*

(d) Montrer que, si n est impair, $|G_n| = \sqrt{n}$.

On poursuit le calcul, en échangeant les deux symboles $\sum$ *:*

$$\begin{aligned}|G_n|^2 &= \sum_{d=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} \underbrace{e_n\big(2d\,y + d^2\big)}_{=e_n(2d\,y)\,e_n(d^2)}\\ &= \sum_{d=0}^{n-1} e_n(d^2) \sum_{y=0}^{n-1} e_n(2d\,y).\end{aligned}$$

Supposons maintenant n *impair.*
Cela entraîne que, pour tout $d \in [\![0, n-1]\!]$*, l'entier* n *divise* $2d$ *si et seulement si* n *divise* d *(c'est un cas particulier du lemme de Gauss, d'ailleurs facile à vérifier à la main), c'est-à-dire si et seulement si* $d = 0$*.*
D'après la première question de la partie, tous les termes de la somme sont donc nuls, à l'exception de celui correspondant à $d = 0$*. On a ainsi*

$$|G_n|^2 = e_n(0^2) \sum_{y=0}^{n-1} e_n(2 \times 0 \times y) = n,$$

d'où l'on tire $|G_n| = \sqrt{n}$*.*

(e) Déterminer la valeur de $|G_n|$ quand n est pair, et déterminer $\left\{n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, G_n = 0\right\}$.

Supposons n *pair.*
Le même raisonnement s'applique essentiellement sauf que, pour $d \in [\![0, n-1]\!]$*, on a l'équivalence*

$$n \textit{ divise } 2d \Leftrightarrow \frac{n}{2} \textit{ divise } d \Leftrightarrow d \in \left\{0, \frac{n}{2}\right\},$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}|G_n|^2 &= e_n(0^2)\, n + e_n\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) n\\ &= n\left(1 + \exp\left(i\,2\pi\,\frac{n}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|G_n|^2 = \begin{cases} 2n & \textit{si } n \equiv 0 \pmod 4\\ 0 & \textit{si } n \equiv 2 \pmod 4\end{cases} \quad \textit{donc} \quad |G_n| = \begin{cases} \sqrt{2n} & \textit{si } n \equiv 0 \pmod 4\\ 0 & \textit{si } n \equiv 2 \pmod 4.\end{cases}$$

In fine*, on a*

$$\left\{n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, G_n = 0\right\} = \left\{n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, |G_n| = 0\right\} = \left\{4m \,\middle|\, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Partie III. Calcul de G_n, au signe près.

Dans cette section, on suppose que n est un nombre premier impair.

- On pourra utiliser le changement d'indices dans les sommes sous la forme suivante : si X est un ensemble fini, que $(a_x)_{x\in X}$ est une famille de nombres complexes indexée par X, et que $\sigma : X \to X$ est une bijection, alors

$$\sum_{x\in X} a_x = \sum_{x\in X} a_{\sigma(x)}.$$

- On rappelle le théorème de Bézout : quels que soient a et $b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, on peut trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + vb = 1$.
- On définit une fonction $r : \mathbb{Z} \to [\![0, n-1]\!]$ envoyant tout entier $x \in \mathbb{Z}$ sur le reste dans sa division par n. On pourra utiliser sans démonstration les deux propriétés (évidentes) suivantes :
  - $\forall x \in \mathbb{Z}, r(x) \equiv x \pmod n$;
  - $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, r(x_1) = r(x_2) \Leftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod n$.

10. Montrer que pour tout $x \in [\![1, n-1]\!]$, on peut trouver $x^\dagger \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $x\,x^\dagger \equiv 1 \pmod n$.

    Soit $x \in [\![1, n-1]\!]$.
    L'entier n *ne divise pas* x. *Comme* n *est premier, on en déduit que* n *et* x *sont premiers entre eux.*
    D'après le théorème de Bézout, on peut trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ *tels que* $u\,x + v\,n = 1$, *d'où l'on tire la congruence* $u\,x \equiv 1 \pmod n$.
    On en déduit $r(u)\,x \equiv u\,x \equiv 1 \pmod n$.
    Par construction, $r(u) \in [\![0, n-1]\!]$. *Par ailleurs,* $r(u) \neq 0$, *car on aurait sinon* $r(u)\,x \equiv 0 \pmod n$.
    On a donc $r(u) \in [\![1, n-1]\!]$.
    Cela montre l'assertion, en posant $x^\dagger = r(u)$.

11. Soit $a \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que l'application $\sigma : \begin{cases} [\![0, n-1]\!] \to [\![0, n-1]\!] \\ \quad x \quad \mapsto \quad r(ax) \end{cases}$ est une bijection.

    - *Montrons que* σ *est injective. Soit* $x_1, x_2 \in [\![0, n-1]\!]$ *tel que* $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$. *On a donc*

    $$\begin{aligned} r(ax_1) = r(ax_2) \quad & \textit{donc} \quad ax_1 \equiv ax_2 \pmod n \\ & \textit{donc} \quad aa^\dagger x_1 \equiv aa^\dagger x_2 \pmod n \\ & \textit{donc} \quad x_1 \equiv x_2 \pmod n. \end{aligned}$$

      Comme $x_1, x_2 \in [\![0, n-1]\!]$, *on en déduit* $x_1 = x_2$, *ce qui conclut.*
    - *Comme* $[\![0, n-1]\!]$ *est un ensemble fini, on en déduit que* σ *est une bijection.*

12. **Premier cas.** On suppose $\exists a \in \mathbb{Z} : a^2 \equiv -1 \pmod n$.
    Montrer que $G_n \in \mathbb{R}$ et en déduire $G_n = \pm\sqrt{n}$.

    Fixons $a \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a^2 \equiv -1 \pmod n$. *Quitte à remplacer* a *par un translaté* $a + kn$, *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *bien choisi, on peut supposer* $a \in [\![0, n-1]\!]$.
    Comme $0^2 = 0 \not\equiv -1 \pmod n$, *on a même* $a \in [\![1, n-1]\!]$, *si bien que l'on peut utiliser la bijection de la question précédente.*
    On a alors, par changement de variables :

    $$G_n = \sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2) = \sum_{x=0}^{n-1} e_n(\sigma(x)^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{n-1} e_n(r(ax)^2) \\
&\overset{*}{=} \sum_{x=0}^{n-1} e_n(-x^2) \\
&= \sum_{x=0}^{n-1} \overline{e_n(x^2)} \\
&= \overline{\sum_{x=0}^{n-1} e_n(x^2)} \\
&= \overline{G_n},
\end{aligned}
$$

l'égalité surmontée d'une astérisque provenant du fait que, pour tout $x \in [\![0, n-1]\!]$, on a la congruence $r(ax) \equiv ax \pmod n$, donc $r(ax)^2 \equiv a^2x^2 \equiv -x^2 \pmod n$. Cela montre $G_n \in \mathbb{R}$.
On a donc $|G_n|^2 = G_n^2$, et le résultat de la partie précédente entraîne $G_n^2 = n$, ce qui donne $G_n = \pm\sqrt{n}$.

13. **Deuxième cas.** On suppose $\forall a \in \mathbb{Z}, a^2 \not\equiv -1 \pmod n$. Montrer que $G_n = \pm i\sqrt{n}$.

- *Remarquons déjà que $\forall x \in [\![1, n-1]\!], (n-x)^2 \equiv x^2 \pmod n$, donc*

$$G_n = 1 + \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} e_n(x^2) + \sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} e_n\left((n-x)^2\right) = 1 + 2\sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} e_n(x^2).$$

  On peut déjà noter qu'aucun élément de la famille $\left(e_n(x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$ ne vaut 1 : comme n est premier, il ne peut diviser x^2 que s'il divise x.

- *Remarquons ensuite que les $\dfrac{n-1}{2}$ éléments de la famille $\left(e_n(x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$ sont tous différents. En effet, si $1 \leqslant x, y \leqslant \dfrac{n-1}{2}$ sont deux éléments tels que $e_n(x^2) = e_n(y^2)$, on a $x^2 \equiv y^2 \pmod n$, donc n divise $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.*
  Comme $x + y \in [\![1, n-1]\!]$, ce produit n'est pas divisible par n. Comme n est premier, cela entraîne que n et $x+y$ sont premiers entre eux. Le lemme de Gauss entraîne alors que n divise $x-y$. Puisque l'on a $-n < 1 - \dfrac{n-1}{2} \leqslant x - y \leqslant \dfrac{n-1}{2} - 1 < n$, la relation de divisibilité entraîne $x = y$.

- *Enfin, les éléments de la famille $\left(e_n(x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$ et ceux de la famille $\left(e_n(-x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$ sont distincts deux à deux.*
  En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $1 \leqslant x, y \leqslant \dfrac{n-1}{2}$ tels que $x^2 = -y^2$. En multipliant de part et d'autre par $(y^\dagger)^2$, on obtient $\left(x\,y^\dagger\right)^2 = -\left(y\,y^\dagger\right)^2 \equiv -1 \pmod p$, ce qui contredit l'hypothèse.

  Par ailleurs, le point précédent entraîne directement que les $\dfrac{n-1}{2}$ éléments de la famille $\left(e_n(-x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$ sont deux à deux distincts.

- *Ainsi, les $n-1$ éléments de $\left(e_n(y)\right)_{y=1}^{n-1}$ se répartissent entre ceux apparaissant dans $\left(e_n(x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$ et $\left(e_n(-x^2)\right)_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}$. On a donc une relation de Chasles*

$$\sum_{y=0}^{n-1} e_n(y) = 1 + \sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} e_n(x^2) + \sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} e_n(-x^2)$$

$$\textit{donc}\quad 0 = 2\sum_{y=0}^{n-1} e_n(y) = \left(1 + 2\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} e_n(x^2)\right) + \left(1 + 2\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} e_n(-x^2)\right)$$

$$= 1 + \sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} e_n(x^2) + \overline{1 + \sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}} e_n(x^2)}$$

$$= G_n + \overline{G_n},$$

ce qui montre que $G_n \in i\mathbb{R}$, *et donc que* $G_n = \pm i\sqrt{n}$.

Partie IV. Détermination du signe.

On admet que la disjonction de cas de la partie précédente correspond au résidu de n modulo 4. Autrement dit, on admet que, pour un nombre premier impair n,

- si $n \equiv 1 \pmod 4$, alors $\exists a \in \mathbb{Z} : a^2 \equiv -1 \pmod n$, et donc $G_n = \pm\sqrt{n}$;
- si $n \equiv 3 \pmod 4$, alors $\forall a \in \mathbb{Z}, a^2 \not\equiv -1 \pmod n$, et donc $G_n = \pm i\sqrt{n}$.

Le but de cette dernière partie est de montrer que, dans tous les cas, le signe est $+$ (Gauss, 1805).

Les deux cas étant similaires, on suppose désormais n premier et $n \equiv 1 \pmod 4$. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 4m + 1$.

14. On définit $T = \sum_{x=1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)$. En séparant les termes de rang pair et impair dans cette somme, montrer

$$T = (1+i)\sum_{y=1}^{2m} \exp\left(i\frac{2\pi}{n}y^2\right).$$

On a $T = \sum_{\substack{x\in[\![1,4m]\!]\\ x \text{ pair}}} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) + \sum_{\substack{x\in[\![1,4m]\!]\\ x \text{ impair}}} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)$.

- *On a* $\sum_{\substack{x\in[\![1,4m]\!]\\ x \text{ pair}}} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) = \sum_{y=1}^{2m} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}(2y)^2\right) = \sum_{y=1}^{2m} \exp\left(i\frac{2\pi}{n}y^2\right)$.
- *De même,*

$$\sum_{\substack{x\in[\![1,4m]\!]\\ x \text{ pair}}} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) = \sum_{y=1}^{2m} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}(n-2y)^2\right)$$

$$= \sum_{y=1}^{2m} \underbrace{\exp\left(i\frac{\pi}{2n}n^2\right)}_{=\exp(i\frac{\pi}{2}n)=i} \underbrace{\exp\left(-i\frac{\pi}{2n}4ny\right)}_{=\exp(-i\,2\pi y)=1} \exp\left(\frac{2\pi}{n}y^2\right)$$

$$= i\sum_{y=1}^{2m} \exp\left(\frac{2\pi}{n}y^2\right),$$

donc

$$T = \sum_{\substack{x\in[\![1,4m]\!]\\ x \text{ pair}}} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) + \sum_{\substack{x\in[\![1,4m]\!]\\ x \text{ impair}}} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) = (1+i)\sum_{y=1}^{2m} \exp\left(\frac{2\pi}{n}y^2\right).$$

15. Montrer $G_n = 1 + \sum_{x=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi x^2}{2n} + \sin \frac{\pi x^2}{2n} \right)$.

On a

$$\begin{aligned}
G_n &= 1 + \sum_{x=1}^{n-1} \exp\left(i \frac{2\pi}{n} x^2 \right) \\
&= 1 + \sum_{x=1}^{2m} \exp\left(i \frac{2\pi}{n} x^2 \right) + \sum_{x=1}^{2m} \exp\left(i \frac{2\pi}{n} (n-x)^2 \right) \\
&= 1 + 2 \sum_{x=1}^{2m} \exp\left(i \frac{2\pi}{n} x^2 \right) && \text{(car } \forall x \in [\![1, 2m]\!], (n-x)^2 \equiv x^2 \pmod{n}\text{)} \\
&= 1 + (1-i)T.
\end{aligned}$$

Comme par ailleurs G_n *est réel, on en déduit que*

$$\begin{aligned}
G_n = \text{Ré}(G_n) &= 1 + \text{Ré}\left((1-i)T\right) \\
&= 1 + \text{Ré}\, T + \text{Im}\, T \\
&= 1 + \sum_{x=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2n} x^2 \right) + \sum_{x=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} x^2 \right),
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Dans la fin du sujet, on note s la partie entière de $\sqrt{n}$, de telle sorte que $s < \sqrt{n} < s+1$.

16. Montrer $1 + \sum_{x=1}^{s} \left(\cos \frac{\pi x^2}{2n} + \sin \frac{\pi x^2}{2n} \right) \geqslant \sqrt{n}$.

Pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, *donc, d'après le tableau de variations de la fonction cosinus,*

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \geqslant \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

En sommant, il vient

$$1 + \sum_{x=1}^{s} \left(\cos \frac{\pi x^2}{2n} + \sin \frac{\pi x^2}{2n} \right) \geqslant 1 + \sum_{x=1}^{s} 1 = 1 + s \geqslant \sqrt{n}.$$

17. **Sommation d'Abel.** Soit $a < b$ deux entiers et $(u_x)_{x=a}^{b}$, $(v_x)_{x=a+1}^{b}$ deux familles de nombres complexes. Montrer

$$-u_a v_{a+1} + \sum_{x=a+1}^{b-1} u_x (v_x - v_{x+1}) + u_b v_b = \sum_{x=a+1}^{b} (u_x - u_{x-1}) v_x.$$

On a

$$\begin{aligned}
&-u_a v_{a+1} + \sum_{x=a+1}^{b-1} u_x (v_x - v_{x+1}) + u_b v_b - \sum_{x=a+1}^{b} (u_x - u_{x-1}) v_x \\
&\qquad = -u_a v_{a+1} + \sum_{x=a+1}^{b-1} \left[u_x (v_x - v_{x+1}) - (u_x - u_{x-1}) v_x \right] + u_b v_b - (u_b - u_{b-1}) v_b
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -u_a v_{a+1} + \sum_{x=a+1}^{b-1} [u_{x-1}v_x - u_x v_{x+1}] + u_{b-1}v_b \\
&= -u_a v_{a+1} + u_a v_{a+1} - u_{b-1}v_b + u_{b-1}v_b \qquad \textit{(télescopage)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

18. En appliquant la sommation d'Abel aux familles

$$
(u_x)_{x=s}^{n-1} = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2n}(x^2+x)\right) \right)_{x=s}^{n-1} \qquad \text{et} \qquad (v_x)_{x=s+1}^{n-1} = \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2n}\right)} \right)_{x=s+1}^{n-1},
$$

montrer l'inégalité

$$
\left| \sum_{x=s+1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) \right| \leqslant \frac{n}{s+1}.
$$

Pour tout $x \in [\![s+1, n-1]\!]$*, on a* $(x-1)^2 + (x-1) = x^2 - x$*, donc*

$$
\begin{aligned}
u_x - u_{x-1} &= \exp\left(i\frac{\pi}{2n}(x^2+x)\right) - \exp\left(i\frac{\pi}{2n}(x^2-x)\right) \\
&= \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) \left[\exp\left(i\frac{\pi}{2n}x\right) - \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x\right)\right] \\
&= \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) 2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}x\right),
\end{aligned}
$$

$$
\textit{donc} \quad (u_x - u_{x-1})v_x = 2i \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right).
$$

Après sommation d'Abel, on a donc

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{x=s+1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) \right| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{x=s+1}^{n-1} (u_x - u_{x-1})v_x \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| -u_s v_{s+1} + \sum_{x=s+1}^{n-2} u_x(v_x - v_{x+1}) + u_{n-1}v_{n-1} \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2} \left[|v_{s+1}| + \sum_{x=s+1}^{n-2} |v_x - v_{x+1}| + |v_{n-1}| \right],
\end{aligned}
$$

par inégalité triangulaire et comme les éléments de la famille $(u_x)_{x=s}^{n-1}$ *sont de module* 1.
Or, par croissance et positivité du sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, on a* $v_{s+1} \geqslant v_{s+2} \geqslant \cdots \geqslant v_{n-2} \geqslant v_{n-1} \geqslant 0$*, d'où*

$$
\begin{aligned}
2\left| \sum_{x=s+1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) \right| &\leqslant v_{s+1} + \sum_{x=s+1}^{n-2} (v_x - v_{x+1}) + v_{n-1} \\
&\leqslant 2v_{s+1}, \\
\textit{donc} \left| \sum_{x=s+1}^{n-1} \exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right) \right| &\leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2n}\right)} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{2n}{\pi(s+1)} = \frac{n}{s+1},
\end{aligned}
$$

en vertu de la question 0.

19. Conclure la démonstration de l'égalité $G_n = \sqrt{n}$.

- *Comme* $s+1>\sqrt{n}$, *on a* $\dfrac{n}{s+1}<\sqrt{n}$, *donc on a montré* $\left|\displaystyle\sum_{x=s+1}^{n-1}\exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)\right|\leqslant\sqrt{n}$.
- *Étant donné* $\theta\in\mathbb{R}$, *on a* $-(\cos\theta+\sin\theta)=\text{Ré}((i-1)e^{i\theta})$ *(c'est géométriquement le produit scalaire des vecteurs d'affixe* $e^{i\theta}$ *et* $-1-i$*), donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir*

$$\begin{aligned}-\sum_{x=s+1}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2}{2n}\right)+\sin\left(\frac{\pi x^2}{2n}\right)\right)&=\text{Ré}\left[(i-1)\sum_{x=s+1}^{n-1}\exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)\right]\\&\leqslant|1-i|\times\left|\sum_{x=s+1}^{n-1}\exp\left(i\frac{\pi}{2n}x^2\right)\right|,\end{aligned}$$

  d'où l'on tire la minoration

$$\sum_{x=s+1}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2}{2n}\right)+\sin\left(\frac{\pi x^2}{2n}\right)\right)\geqslant-\sqrt{2n}$$

- *En ajoutant la minoration précédente, on obtient*

$$\begin{aligned}G_n&=1+\sum_{x=1}^{n-1}\left(\cos\frac{\pi x^2}{2n}+\sin\frac{\pi x^2}{2n}\right)\\&=\left(1+\sum_{x=1}^{s}\left(\cos\frac{\pi x^2}{2n}+\sin\frac{\pi x^2}{2n}\right)\right)+\sum_{x=s+1}^{n-1}\left(\cos\frac{\pi x^2}{2n}+\sin\frac{\pi x^2}{2n}\right)\\&\geqslant\sqrt{n}-\sqrt{2n}\\&\geqslant(1-\sqrt{2})\sqrt{n}.\end{aligned}$$

- *On en déduit notamment* $G_n>-\sqrt{n}$, *donc l'égalité* $G_n=\pm\sqrt{n}$ *montre qu'en fait* $G_n=\sqrt{n}$.