Familles sommables

Exercice 3.

On pourra commencer par compter le nombre de nombres à ℓ chiffres, tous différents de 7, puis estimer leur contribution à $\displaystyle\sum_{n\in E}\frac{1}{n}$.

Exercice 8.

On pourra introduire, pour tout $d \geqslant 1$, la somme $S_d = \displaystyle\sum_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=d}} \frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 10.

Tout entier $\geqslant 2$ s'écrit de manière unique sous la forme q^ℓ, où q est un élément de $[\![2,+\infty[\![\setminus\mathcal{P}$ et $\ell \geqslant 1$.

Exercice 15.

Pour la dernière question, on veillera à traiter rigoureusement les arguments de limite (et à distinguer les limites quand $r \to +\infty$ et quand $s \to 1$).

On pourra par exemple montrer $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists s \in]1,+\infty[\,, \exists r \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \geqslant A$.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) La famille est à termes positifs, donc on peut simplement calculer la somme dans $[0,+\infty]$ pour savoir si elle est finie ou non.
Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{(n+m)!}{n!m!} = \dbinom{n+m}{n} \geqslant 1$, donc $\dfrac{2^n\,3^m}{(n+m)!} \leqslant \dfrac{2^n\,3^m}{n!m!}$.
Par croissance, on en déduit :

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{2^n\,3^m}{(n+m)!} \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{2^n\,3^m}{n!m!} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^n}{n!}\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{3^m}{m!}\right) = e^2\,e^3 = e^5 < +\infty,$$

ce qui montre que la famille est sommable.

(ii) La famille est à termes positifs. En restreignant aux couples de la forme $(k+1,k)$, on obtient

$$\sum_{\substack{n,m\geqslant 1\\ n\neq m}} \frac{1}{n^2-m^2} \geqslant \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(k+1)^2-k^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2k+1} = +\infty,$$

car la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2k+1}$ diverge, par comparaison à la série harmonique.
La famille n'est donc pas sommable.

(iii) La famille est à termes positifs. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n,m\geqslant 1}\frac{1}{(n+m)^3} &= \sum_{s\in[\![2,+\infty[\![}\ \sum_{\substack{n,m\geqslant 1\\ n+m=s}}\frac{1}{s^3}\\ &= \sum_{s\in[\![2,+\infty[\![}\left(\frac{1}{s^3}\sum_{\substack{n,m\geqslant 1\\ n+m=s}}1\right)\\ &= \sum_{s\in[\![2,+\infty[\![}\frac{s-1}{s^3}\leqslant \sum_{s\in[\![2,+\infty[\![}\frac{1}{s^2}=\zeta(2)-1<+\infty.\end{aligned}$$

Cela montre que la famille est sommable.

(iv) Le problème est qu'il y a une infinité de rationnels (par exemple) entre 1 et 2, qui apportent chacun une contribution $\geqslant \dfrac{1}{4}$ à la somme.

Plus précisément, la famille est à termes positifs et on a $\left\{1+\dfrac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}\subseteq \mathbb{Q}\cap\,]1,+\infty[$ donc, par restriction et croissance,

$$\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}\frac{1}{r^2}\geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{4}=+\infty.$$

La famille n'est donc pas sommable.

Autocorrection B.

La famille est à termes positifs, donc on peut mener les calculs dans $[0,+\infty]$.

À $n\geqslant 2$ fixé, la famille (géométrique) $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{p\geqslant 2}$ est sommable si et seulement si $\dfrac{1}{n^\alpha}<1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha>0$ et, dans ce cas,

$$\sum_{p\geqslant 2}\frac{1}{n^{\alpha p}}=\sum_{p\geqslant 2}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^p=\frac{1}{n^{2\alpha}}\frac{1}{1-\frac{1}{n^\alpha}}=\frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n^\alpha-1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

La famille $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha p}}\right)$ est donc sommable si et seulement si $\alpha>0$ et $\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)_{n\geqslant 2}\in\ell^1([\![2,+\infty[\![)$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha>\dfrac{1}{2}$, d'après le théorème sur les séries de Riemann.

Autocorrection C.

1. Soit $j\in\mathbb{N}$.

   On a $\left|\dfrac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}\right|=\underset{i\to+\infty}{O}\left(2^{-i}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_i\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}$ converge absolument.

   On a

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{-1}{2^{j-i}}+\sum_{i=j+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j-i}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^j}.$$

   On en déduit que la série de terme général $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}=2.$$

2. Les mêmes calculs montrent que $\forall i \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}} = \frac{-1}{2^{i-1}}$, puis que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}} = -2$.
Si la famille était sommable, on aurait, d'après le théorème de Fubini
$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}},$$
ce qui n'est manifestement pas le cas.
3. Par restriction aux couples de la forme $(k+1,k)$, on a
$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}\right| \geqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^1} = +\infty,$$
ce qui montre à nouveau la non-sommabilité de la famille.

Autocorrection D.

Tous les termes étant positifs, on peut calculer dans $[0,+\infty]$ sans prendre de précautions. On a
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(p\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\right) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{1}_{(p\leqslant n)}\frac{p\,a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n(n+1)}\sum_{p=0}^{n} p\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty.$$
Cela montre que la famille $\left(p\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable, et donne sa somme.

Dans le langage des séries, cela signifie que la série de terme général $\left(p\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est (absolument) convergente, de somme $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Autocorrection E.

1. Les séries $\displaystyle\sum_p z^{2p}$ et $\displaystyle\sum_q z^{3q}$ sont absolument convergentes, c'est-à-dire que les familles $(z^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(z^{3q})_{q\in\mathbb{N}}$ sont sommables, de sommes respectives
$$\sum_{p\in\mathbb{N}} z^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{2p} = \frac{1}{1-z^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{q\in\mathbb{N}} z^{3q} = \sum_{q=0}^{+\infty} z^{3q} = \frac{1}{1-z^3}.$$
Par produit, la famille $(z^{2p+3q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ est sommable, et
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z^{2p+3q} = \sum_{p\in\mathbb{N}} z^{2p} \times \sum_{q\in\mathbb{N}} z^{3q} = \sum_{p=0}^{+\infty} z^{2p} = \frac{1}{1-z^2}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2p} = \frac{1}{1-z^3}.$$
2. Par produit de Cauchy (les deux séries sont absolument convergentes), on a
$$S(z) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(2|k)}z^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(3|\ell)}z^\ell\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n\, z^n,$$
où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{1}_{(2|k)}\mathbb{1}_{(3|n-k)}$, qui est le nombre de manières de décomposer n comme somme d'un entier positif (k) pair et d'un entier positif $(n-k)$ multiple de 3, c'est-à-dire $d_n = \left|\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \,\middle|\, 2p+3q=n\right\}\right|$.