Familles sommables

Sommabilité

Autocorrection A.

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\text{(i)}\ \left(\frac{2^n\,3^m}{(n+m)!}\right)_{n,m\in\mathbb{N}}\ ;\quad \text{(ii)}\ \left(\frac{1}{n^2-m^2}\right)_{\substack{n,m\geqslant 1\\ n\neq m}}\ ;\quad \text{(iii)}\ \left(\frac{1}{(n+m)^3}\right)_{n,m\geqslant 1}\ ;\quad \text{(iv)}\ \left(\frac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}.$$

Autocorrection B.

Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la famille $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geqslant 2}$ est-elle sommable ?

Autocorrection C.

1. Pour tout $j\in\mathbb{N}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_i \frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}$ converge et calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}$, et en déduire que $\left(\dfrac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

3. Montrer directement la non-sommabilité de $\left(\dfrac{\operatorname{sgn}(i-j)}{2^{|i-j|}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

Exercice 1.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha\in\mathbb{R}$ pour que $\left(\dfrac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{p,q\geqslant 1}$ soit sommable.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs positives telles que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge.

Exercice 3$^+$ (Séries de Kempner).

Soit $E\subseteq\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers >0 dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 7.

Montrer que $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in E}$ est sommable.

Calculs de sommes

Autocorrection D.

Soit $\sum\limits_{n} a_n$ une série à termes positifs convergente.

Montrer que la série de terme général $\left(p \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n(n+1)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, et calculer sa somme.

Autocorrection E.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$.

1. Montrer que la famille $\left(z^{2p+3q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ est sommable, et calculer $S(z) = \sum\limits_{p,q\in\mathbb{N}} z^{2p+3q}$.
2. Exprimer $S(z)$ sous la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d_n\, z^n$, où $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres entiers que l'on interprètera de façon combinatoire.

Exercice 4.

Soit $p \geqslant 3$ un entier. Calculer $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \sum\limits_{n=m}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}}$.

Exercice 5.

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}$ et en déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^4}{n!}$.

Exercice 6.

Soit $x \in \mathbb{C}$ un nombre de module < 1. Montrer les égalités suivantes.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$;

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^i}{1-x^{2i}}$;

(iii) $\sum\limits_{i,k\geqslant 1} i\, x^{i\,k} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nx^n}{1-x^n}$.

Dans tous les cas, écrire également la quantité de l'énoncé sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, pour une certaine suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on interprètera arithmétiquement.

Exercice 7$^+$.

Montrer

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{H_n}{n^2} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{H_n}{(n+1)^2} = 2\zeta(3).$$

Exercice 8$^+$.

Calculer $\sum\limits_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}} \dfrac{1}{p^2q^2}$ en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Exercice 9^{++}.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}$, où φ est l'indicatrice d'Euler.

Exercice 10^{++}.

Soit $P = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \ldots\}$ l'ensemble des puissances parfaites (en excluant 1).

Calculer $\displaystyle\sum_{n \in P} \frac{1}{n-1}$.

Exercice 11^{++}.

Si n est un entier, on note $b(n)$ le nombre de bits égaux à 1 dans son écriture binaire.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n(n+1)}$.

Mélange

Exercice 12^{++} (Séries d'Eisenstein).

On définit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

1. Soit k un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $A_z \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{1}{|az+b|^k} \leqslant \frac{A_z}{\max(|a|, |b|)^k}.$$
2. Soit $k \geqslant 3$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(nz+m)^k}\right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ est sommable.
3. Soit $G_k : \begin{cases} \mathbb{H} \to & \mathbb{C} \\ z \mapsto & \displaystyle\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(nz+m)^k} \end{cases}$. Calculer G_k quand k est impair.
4. On suppose k pair. Montrer $G_k(iy) \xrightarrow[y \to +\infty]{} 2\zeta(k)$.

Exercice 13^{++} (Théorème de réarrangement de Riemann).

Soit $\displaystyle\sum_n u_n$ une série semi-convergente de nombres réels et $S \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$.

Exercice 14^{++}.

Étant donné deux suites $u, v \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, on notera $u \preccurlyeq v$ si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_n u_k(n)$ converge.

Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \preccurlyeq v$ et $\displaystyle\sum_n v(n)$ converge.

Exercice 15^{++}.

On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers (rangée par ordre croissant) et, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note $E_r \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers appartiennent à $\{p_1, \ldots, p_r\}$.

1. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $s > 1$, montrer $\displaystyle\sum_{n\in E_r} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$.
2. En déduire $\forall s > 1, \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1-p_k^{-s}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \zeta(s)$, ce que l'on note habituellement $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}}$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.