# Dénombrement

## Mots et listes

**Autocorrection A.**

Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 0.

1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer le cardinal de $E_1$, la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de $E_2$, la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de $E_3$, la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.

**Autocorrection B.**

Tous les matins, vous choisissez entre thé et café, en cherchant à lutter contre la routine. Combien y a-t-il de manières de choisir votre boisson pour $n$ petits déjeûners consécutifs :

(i) sans aucune contrainte ?
(ii) en étant sûr d'avoir bu au moins une fois chaque boisson ?
(iii) en étant sûr d'avoir bu aussi souvent une boisson que l'autre ?
(iv) en ne prenant jamais la même boisson deux jours de suite ?
(v) en ne prenant jamais de café deux jours de suite ?
(vi) en ne prenant jamais la même boisson trois jours de suite ?

**Exercice 1.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \{0, 1\}^n$, que l'on interprète comme un ensemble de $n$-listes de 0 et de 1.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien d'éléments de E ont exactement $k$ occurrences de « 1 » ?
2. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Combien d'éléments de E ont leur première occurrence de « 1 » en $p$-ième position ?

**Exercice 2.**

Déterminer le cardinal de

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in M_{2,n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\} \\ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \text{ impair} \end{array} \right\}.$$

**Exercice 3$^+$.**

Un *mot de longueur* $n$ (sous-entendu : sur l'alphabet $\{a, b\}$) est simplement un élément de $\{a, b\}^n$, que l'on écrira sans parenthèses ni virgules : $aaaabba = (a, a, a, a, b, b, a)$ est un mot de longueur 7.

Un *facteur* d'un tel mot $w$ est simplement la donnée d'un mot formé de lettres consécutives dans $w$. Par exemple, tous les mots de longueur 2 sont des facteurs de $aaaabba$, mais $aba$, par exemple n'en est pas un.

1. Dénombrer les mots de longueur $n$ dont $aa$ n'est pas un facteur.
2. Dénombrer les mots de longueur $n$ dont $ab$ n'est pas un facteur.
3. Dénombrer les mots de longueur $n$ dont $aab$ n'est pas un facteur.

# Parties

**Autocorrection C.**

On tire une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir

(i) sans imposer de contraintes sur les cartes ?
(ii) contenant 5 cœurs ou 5 trèfles ?
(iii) contenant 2 cœurs et 3 trèfles ?
(iv) contenant au moins un as ?
(v) contenant au plus un as ?
(vi) contenant au moins une paire (notamment, on comptera les brelans, les carrés, etc.) ?
(vii) contenant au moins deux paires de hauteur différentes (notamment, on comptera les fulls) ?
(viii) contenant exactement 2 as et exactement 3 cœurs ?
(ix) contenant exactement un as et au moins trois carreaux ?
(x) contenant au plus un cœur et au moins 2 rois ?

**Autocorrection D.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \subseteq [\![1, n]\!]$ est une partie non vide, on définit son *diamètre*

$$\operatorname{diam} A = \max A - \min A.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ de diamètre $k$.

**Exercice 4.**

Soit E un ensemble fini.

1. Combien y a-t-il de couples $(A, B)$ de parties de E disjointes ?
2. Combien y a-t-il de couples $(A, B)$ de parties de E tels que $A \subseteq B$ ?
3. Combien y a-t-il de couples $(A, B)$ de parties de E tels que $A \cup B = E$ ?
4. Soit C une partie de E. Combien y a-t-il de couples $(A, B)$ de parties de E tels que $A \cap B = C$ ?

**Exercice 5.**

Soit E un ensemble fini à $n$ éléments. Quel est le cardinal de $\left\{(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^2 \,\middle|\, X \subseteq Y \subseteq Z\right\}$ ?

**Exercice 6.**

Soit E un ensemble de cardinal $n$.

Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y$ soit un singleton.

**Exercice 7$^+$.**

Combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas d'entiers consécutifs ?

**Exercice 8$^+$ (Théorème de Sperner).**

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On se place dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}([\![1, n]\!]), \subseteq)$.

1. Donner des exemples d'antichaînes, en précisant leur cardinal à chaque fois.
2. On appelle *chaîne complète* toute partie $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ telle que que $C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n$.
   (a) Combien y a-t-il de chaînes complètes ?
   (b) Combien y a-t-il de chaînes complètes contenant une partie $X \subseteq [\![1, n]\!]$ donnée ?
3. Déduire de ce qui précède que toute antichaîne vérifie *l'inégalité de Lubell-Yamamoto-Meshalkin* :

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|\,!\,(n - |A|)\,! \leqslant n!.$$

4. Quel est le cardinal maximal d'une antichaîne ?

## Calculs de sommes

**Exercice 9.**

Soit E un ensemble fini. Calculer

(i) $\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{P}(E)} |A|$ ; (ii) $\displaystyle\sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} |A\cap B|$ ; (iii) $\displaystyle\sum_{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2} |A\cup B|$.

**Exercice 10.**

Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{X,Y\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])\\ X\cap Y=\varnothing}} (|X|+|Y|)$.

# Applications

**Exercice 11.**

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le nombre d'applications $[\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ strictement croissantes.
2. Déterminer le nombre d'applications $[\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissantes
   (a) en se ramenant à un dénombrement de compositions (c'est-à-dire à l'astuce *bars and stars*) ;
   (b) en se ramenant au cas des applications strictement croissantes.

**Exercice 12$^+$ (Nombre de surjections).**

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal $n$ dans un ensemble de cardinal $p$.

1. Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$, ainsi que $S(n,n)$, $S(n,1)$ et $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a $S(n,p) = p\,[S(n-1,p) + S(n-1,p-1)]$.
4. En déduire : $S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} k^n$.

**Exercice 13$^+$.**

Écrire sous forme d'une somme le nombre d'applications $p : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $p\circ p = p$.

# Permutations

**Exercice 14.**

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$. Déterminer le nombre de parties $A \subseteq [\![1,n]\!]$ telles que $\sigma[A] = A$.

**Exercice 15$^+$.**

Si $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$, on note $o(\sigma)$ le nombre de cycles apparaissant dans la décomposition de $\sigma$ en produit de cycles disjoints (en comptant les points fixes).

1. Factoriser le polynôme $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} X^{o(\sigma)} \in \mathbb{C}[X]$.
2. En déduire la moyenne $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} o(\sigma)$.

**Exercice 16$^+$ (Dérangements).**

Soit E un ensemble de cardinal $n$. On appelle *dérangement* de E toute permutation de E sans point fixe.

On note $D_n$ le nombre de dérangements de E.

1. Calculer $D_1$, $D_2$, $D_3$. On posera $D_0 = 1$.
2. Déterminer le nombre de permutations de E laissant exactement $k$ éléments invariants.
3. En déduire la formule $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
4. En déduire $D_4$ et $D_5$.
5. Montrer que l'on a $D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$.

**Exercice 17$^+$.**

Soit $p$ un nombre premier. Combien y a-t-il de d'éléments de $\mathfrak{S}(2p)$ d'ordre $p$ ?

**Exercice 18$^+$.**

On pose $a_n$ le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}(2n)$ dont tous les cycles sont de longueur $\leqslant n$.

Donner une expression pour $a_n$ et calculer la limite de la suite $\left(\frac{a_n}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Coefficients binomiaux

**Autocorrection E.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la formule $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.
2. Soit $n_1, \ldots, n_p$ des entiers. Montrer que pour tout entier $q$,

$$\binom{n_1 + \cdots + n_p}{q} = \sum_{k_1+\cdots+k_p=q} \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_p}{k_p}.$$

**Exercice 19.**

Soit $0 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers. Montrer que

$$\binom{n}{k} 2^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$$

par le calcul, puis par une preuve combinatoire.

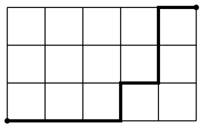
**Exercice 20$^{++}$.**

Donner une démonstration combinatoire de $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p \\ i_1+i_2+\cdots+i_p=n}} i_1\, i_2 \cdots i_p = \binom{n+p-1}{2p-1}$.

## Chemins

**Exercice 21 (Chemins N/E).** ☑

On appelle *chemin* N/E un chemin entre deux points de $\mathbb{Z}^2$ constitué de pas $\mathsf{E} = (1, 0)$ et $\mathsf{N} = (0, 1)$.

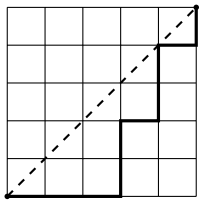


Le chemin $\mathsf{E}^3\mathsf{NEN}^2\mathsf{E}$, reliant $(0, 0)$ à $(5, 3)$.

1. Compter le nombre de chemins N/E reliant $(0, 0)$ à $(n, m)$.
2. En déduire une démonstration combinatoire de la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

**Exercice 22$^+$ (Nombres de Catalan).**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $C_n$, et on appelle $n$-ième nombre de Catalan, le nombre de chemins N/E reliant $(0, 0)$ à $(n, n)$ et restant dans le secteur $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, x \geqslant y\right\}$.



Le but de l'exercice est de donner deux démonstrations de nature combinatoire de la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

0. Vérifier $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n}$.
1. **Démonstration par réflexion.** Soit $a > b$ deux entiers naturels.
   (a) Montrer que le nombre de chemins N/E reliant $(1, 0)$ à $(a, b)$ touchant la diagonale est égal au nombre de chemins N/E reliant à $(0, 1)$ à $(a, b)$.
   (b) En déduire que le nombre de chemins N/E reliant $(1, 0)$ à $(a, b)$ ne touchant pas la diagonale est $\dfrac{a-b}{a+b}\dbinom{a+b}{a}$.
   (c) Conclure.
2. **Démonstration par rotation.** On rassemble les anagrammes de $\mathsf{N}^{n+1}\mathsf{E}^n = (\mathsf{N}, \mathsf{N}, \dots, \mathsf{N}, \mathsf{E}, \dots, \mathsf{E})$ dans un ensemble $\mathcal{A}$. Une anagramme $a' \in \mathcal{A}$ est dite *équivalente* à $a = (a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathcal{A}$, ce que l'on notera $a \sim a'$, si $\exists i \in [\![0, 2n]\!] : a' = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+2n})$, où les indices sont à considérer modulo $2n$. La relation $\sim$ est clairement une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que toutes les classes d'équivalence de $\sim$ possèdent exactement $2n + 1$ éléments.
   (b) Montrer (par récurrence ou géométriquement, en considérant un chemin N/E infini correspondant à $\dots, a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_0, a_1, \dots, a_{2n}, \dots$) que toute classe d'équivalence contient une unique anagramme $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathcal{A}$ telle que, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, le préfixe $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ contient strictement plus de E que de N.
   (c) Conclure.

**Exercice 23$^+$.**

1. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

   (b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}$.

2. Le but est ici de donner une démonstration combinatoire de l'identité précédente.

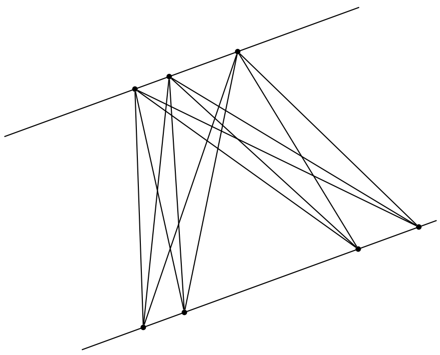
(a)$^{+++}$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a $\binom{2n}{n}$ chemins N/E de longueur $2n$ issus de $(0,0)$ et ne rencontrant la diagonale qu'en $(0,0)$.

(b) Conclure.

## Mélange

**Exercice 24.**

On dispose de deux droites parallèles, dont l'une contient p points $A_1, \dots, A_p$ et l'autre en contient q, notés $B_1, \dots, B_q$. On suppose que trois des segments $[A_iB_j]$ ne sont jamais concourants.



Combien y a-t-il de points d'intersection entre les segments (sans compter les $p+q$ points initiaux) ?

**Exercice 25.**

Montrer que toute involution d'un ensemble de cardinal impair possède un point fixe.

**Exercice 26$^+$.**

Un ensemble d'entiers E est dit *sans somme* si $\forall x, y, z \in E, x + y \neq z$.

Quel est le cardinal maximal d'une partie sans somme de $[\![1, n]\!]$ ?

**Exercice 27$^+$.**

Soit S un ensemble de cardinal $n$ et $A_1, \dots, A_m \subseteq S$ des parties vérifiant

$$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \exists i \in [\![1, m]\!] : (x \in A_i \text{ et } y \notin A_i) \text{ ou } (x \notin A_i \text{ et } y \in A_i).$$

Montrer que $m \geqslant \log_2(n)$.

**Exercice 28$^+$.**

Soit K un corps fini à q éléments.

1. Montrer qu'il y a $(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-\ell+1} - 1)$ familles libres à $\ell \leqslant n$ éléments dans $K^n$.
2. Quel est le cardinal de $GL_n(K)$ ?
3. Quel est le cardinal de $SL_n(K)$ ?